Mathématiques XP Défis Matrices

Thiaude P.

D01 On pose :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Calculer $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$ et $\boldsymbol{A}^4$, conjecturer la forme explicite de $\boldsymbol{A}^n$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, puis démontrer cette conjecture.

Corrigé

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+0 & 2+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8+0 & 4+3 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16+0 & 8+7 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• initialisation

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc P_0 est vraie.

• hérédité

Supposons vraie P_k pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} est vraie

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (hypothèse\ de\ récurrence)$$

On a :

$$\begin{aligned} &A^{k+1} \\ &= A \times A^k \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 2^k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^k + 0 & 2(2^k-1)+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^{k+1}-2+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^{k+1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a :

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^{k+1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{2}^n & \mathbf{2}^n - \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$